

Mécanique des Fluides Compressibles

Eléments de thermodynamique

Dr. Flavio NOCA

Semestre printemps 2024-2025

2.1.1 Variables thermodynamiques

Premier principe de thermodynamique

Variable d'état

➤ Définition

Quantité dépendante de l'état du système uniquement

➤ Propriétés

Intégrale indépendante du chemin d'intégration

$$\int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

$$\oint d\psi = 0$$

Le symbole d indique qu'il s'agit d'une différentielle totale (exacte).

Grandeur de parcours

➤ Définition

Quantité dépendante de l'histoire du système

➤ Propriétés

Intégrale dépendante du chemin d'intégration

$$\int_1^2 \delta\phi \neq \phi_2 - \phi_1$$

$$\oint \delta\phi \neq 0$$

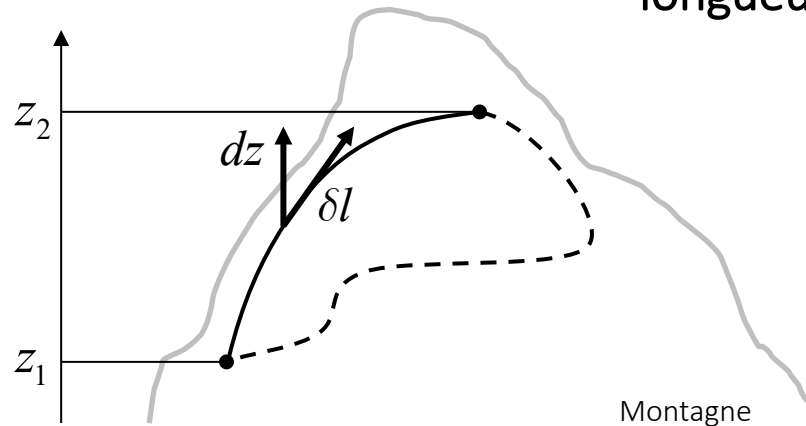
Le symbole δ indique qu'il s'agit d'une différentielle non-exacte.

2.1.1 Variables thermodynamiques

Premier principe de thermodynamique

Variable d'état:
altitude

Grandeur de parcours:
longueur du chemin parcouru



$$\int_1^2 dz = z_2 - z_1$$

$$\oint dz = 0$$

➔ La variable z est indépendante du chemin suivi entre les états 1 et 2 et peut être évaluée en tout point

$$\int_1^2 \delta l = l', l'', \dots$$

$$\oint \delta l \neq 0$$

➔ La grandeur l dépend de la succession des points intermédiaires entre les états 1 et 2

2.1.1 Variables thermodynamiques

Premier principe de thermodynamique

Système simple

➤ Définition

Un système est **simple** si son état est entièrement défini par :

- Sa composition chimique
- Sa masse
- 2 variables d'état indépendantes

➤ Remarque

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit simple:

- Système monophasé
- Système en équilibre thermique et mécanique

➤ Conséquences

Soit ψ_1, ψ_2, ψ_3 variables d'état indépendantes, si le système est simple:

$$\psi_1 = \psi_1(\psi_2, \psi_3)$$

Et sous forme différentielle:

$$d\psi_1 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right)_3 d\psi_2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right)_2 d\psi_3$$

➤ Exemple

On choisit les variables d'état $e, p, v (= \frac{1}{\rho})$
On peut écrire:

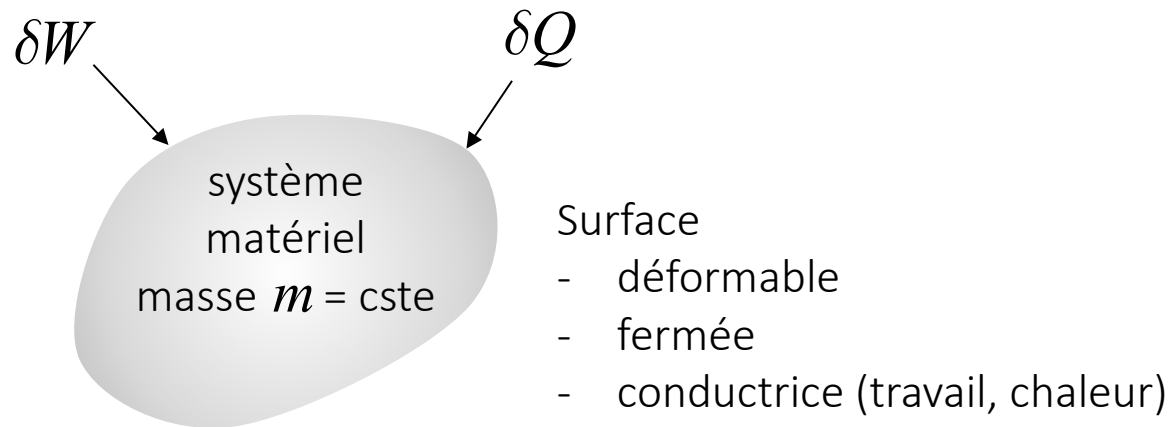
$$e = e(p, v)$$

Et sous forme différentielle:

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_p dv$$

2.1.2 Formulation du premier principe

Premier principe de thermodynamique



➤ Système fermé (pas de flux de masse)

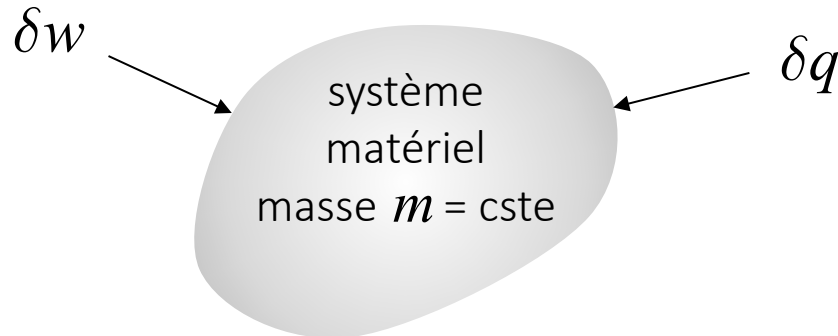
➤ Substance chimiquement inerte

La somme de l'énergie fournie sous forme de chaleur δQ et de travail δW à une masse de gaz m est égale à la variation de son énergie totale dE_t

$$dE_t = \delta Q + \delta W$$

2.1.2 Formulation du premier principe

Premier principe de thermodynamique



En divisant par la masse m , le premier principe s'écrit:

$$de_t = de + de_{cin} + de_{pot} = \delta q + \delta w$$

δq	chaleur spécifique ou massique fournie par l'extérieur
δw	travail spécifique ou massique fourni par les forces extérieures
de_t	variation d'énergie spécifique ou massique totale
de	variation d'énergie interne spécifique ou massique
de_{cin}	variation d'énergie cinétique spécifique ou massique
de_{pot}	variation d'énergie potentielle spécifique ou massique

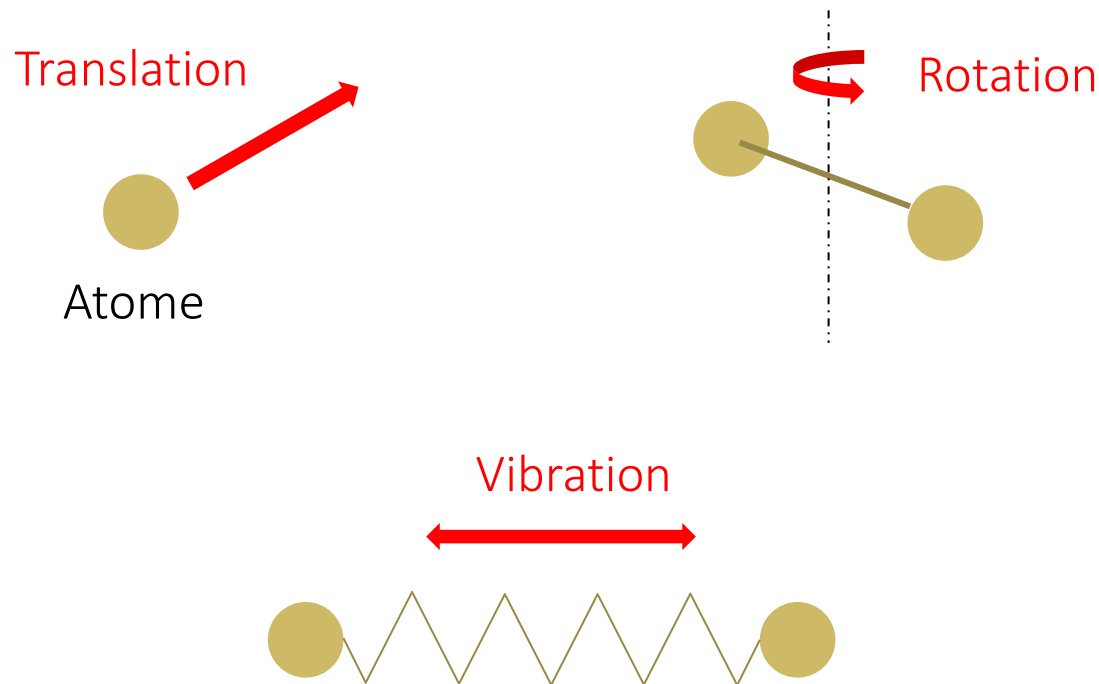
2.1.2 Formulation du premier principe

Premier principe de thermodynamique

Energie interne e

= énergie cinétique + potentielle à l'échelle atomique/moléculaire

Exemple: pour un gaz parfait



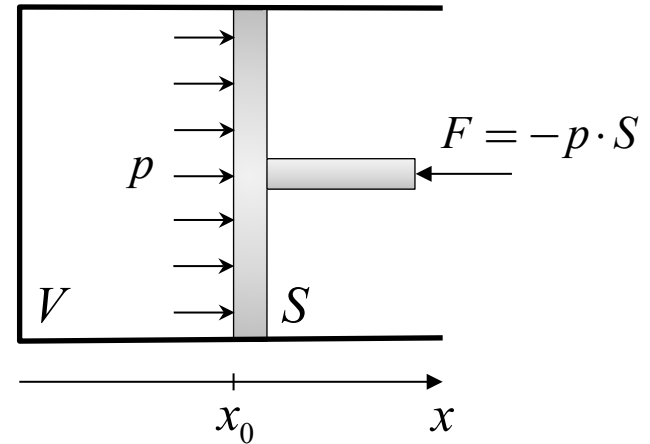
2.1.3 Formulation alternative du 1er principe

Premier principe de thermodynamique

EXPRESSION DU TERME DE TRAVAIL MÉCANIQUE pour un processus REVERSIBLE

Hypothèses

- Système homogène isotrope
- Energie potentielle nulle
- Energie cinétique nulle
- Déplacement du piston sans frottement



Par définition, le volume massique s'écrit,

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Puisque m est constant (système fermé),
on obtient la relation différentielle

$$dV = m dv$$

$$\Rightarrow m dv = S dx \quad \Rightarrow dx = \frac{m dv}{S}$$

Le volume peut aussi s'exprimer par:

$$V - V_0 = S(x - x_0)$$

qui devient sous forme différentielle:

$$dV = S dx$$

2.1.3 Formulation alternative du 1er principe

Premier principe de thermodynamique

Le travail massique exercée par la force extérieure F est égal à:

$$\delta w = \frac{F}{m} dx = \frac{(-p \cdot S)}{m} \left(\frac{m}{S} dv \right) = -p dv$$

$$dx = \frac{m}{S} dv$$

$$F = -p \cdot S$$

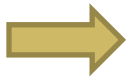
$$de = \delta q + \delta w$$

On remplace ce terme dans la formulation du premier principe:

$$de = \delta q + \delta w = \delta q - p dv$$

Remarque

Le remplacement de δw par $-p dv$ nécessite un **processus réversible**:



Le déplacement doit être suffisamment lent pour admettre une pression uniforme dans le volume du cylindre et pour négliger les frottements

2.1.4 Chaleurs spécifiques

Premier principe de thermodynamique

Un transfert de chaleur δq implique une variation de température dT du système

Définition

- La chaleur spécifique est définie par :

$$c = \frac{\delta q}{dT}$$

q n'est pas une variable d'état



La chaleur spécifique dépend de la transformation

- A l'aide du premier principe la définition devient (pour une transformation **réversible**)

$$c = \frac{\delta q}{dT} = \frac{de}{dT} + p \frac{dv}{dT} \quad \left| \quad de = \delta q - pdv \right.$$

- On utilise couramment les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant,

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p \quad c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v$$

2.1.4 Chaleurs spécifiques

Premier principe de thermodynamique

- Pour un système simple, on peut écrire:

$$e = e(v, T) \quad de = \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT = \delta q - p dv$$

- Ainsi

$$\delta q = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] dv$$

- Pour les transformation choisies, on en déduit:

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v + \left(\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right) \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

- Remarques

- Relation complexe pour c_p car les termes en dv ne s'annulent pas pour la transformation à pression constante
- Utilisation d'une autre variable d'état pour le calcul de c_p

2.1.4 Chaleurs spécifiques

Premier principe de thermodynamique

- Définition de la variable d'état enthalpie:

$$h = e + pv \rightarrow dh = de + pdv + vdp$$

- En vertu du premier principe: $dh = \delta q + vdp$

- Pour un système simple, on peut écrire:

$$h = h(p, T) \rightarrow dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT = \delta q + vdp$$

$$\rightarrow \delta q = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] dp$$

- Pour les transformations choisies, on en déduit:

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right) \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

2.1.4 Chaleurs spécifiques

Premier principe de thermodynamique

- Finalement, on retient les relations suivantes pour c_v et c_p

$$c_v = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad c_p = \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$c_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v + \left(\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right) \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

$$c_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right) \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

- On en déduit les relations suivantes:

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

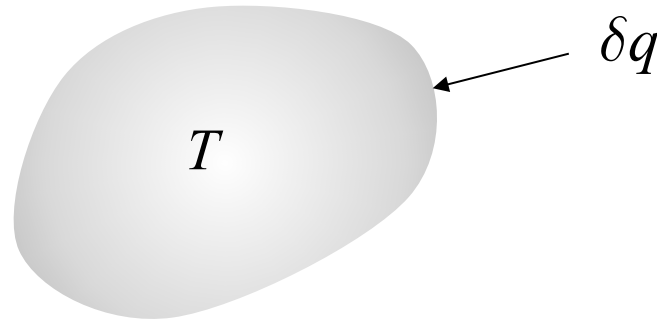
- Le rapport des chaleurs spécifiques γ est défini par

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}$$

2.2.1 Entropie

Second principe de thermodynamique

Accroissement d'entropie d'un système à température T lié à un transfert de chaleur δq



Loi de Clausius pour une transformation **réversible**

Système en équilibre (homogène)

$$\oint \left(\frac{\delta q}{T} \right)_{\text{rév}} = 0$$

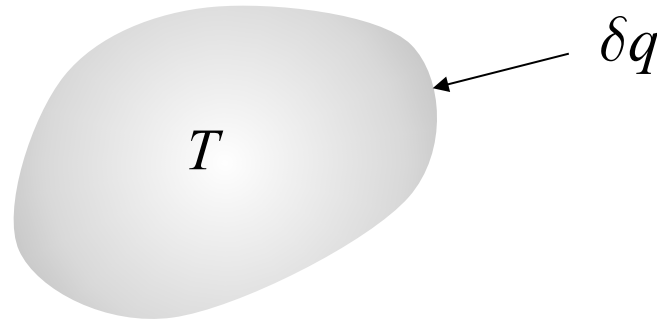
Il existe donc une variable d'état S
à laquelle Clausius a donné le nom d'**ENTROPIE**

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T} \right)_{\text{rév}}$$

2.2.1 Entropie

Second principe de thermodynamique

Accroissement d'entropie d'un système à température T lié à un transfert de chaleur δq



Transformation **irréversible**
avec **création interne d'entropie**

$$\delta s_i$$

Système en déséquilibre (non homogène),
transfert de chaleur interne, réaction chimique
(création d'entropie)

Comme l'entropie est une fonction d'état, elle ne dépend pas de la transformation, réversible ou irréversible

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_i$$

2.2.2 Formulation du second principe

Second principe de thermodynamique

Toute transformation thermodynamique est irréversible

- Le second principe de la thermodynamique s'énonce comme suit:

La variation d'entropie d'un système thermodynamique quelconque, due aux opérations internes, ne peut être que positive ou nulle.

- Le second principe prend ainsi l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$\delta s_i \geq 0 \qquad ds \geq \frac{\delta q}{T}$$

- *Remarques*

Une transformation réversible dans ce cas est un processus idéal, qui peut être considéré comme une suite d'états d'équilibres infiniment voisins

2.2.2 Formulation du second principe

Second principe de thermodynamique

➤ Conséquence:

- Dans certains cas, les phénomènes irréversibles sont assez faibles pour être négligés, nous avons alors, pour une **transformation réversible**:

$$ds = \frac{\delta q}{T} \quad \longrightarrow \quad \delta q = Tds$$

- Le premier principe s'écrit donc:

$$de = Tds - pdv \quad \longleftrightarrow \quad dh = Tds + vdp$$

- On obtient

$$Tds = de + pdv = dh - vdp$$

➤ Remarques

- Ces relations s'appellent les **RELATIONS DE GIBBS**.
- Elles ne dépendent que de fonctions d'état: **ELLES SONT VALABLES POUR TOUTE TRANSFORMATION, RÉVERSIBLE OU IRRÉVERSIBLE.**

2.3.1 Relations de réciprocité

Transformations thermodynamiques

Relations de réciprocité obtenues à partir de $s = s(p, T)$ et $h = h(p, T)$

➤ Soient,

$$s = s(p, T)$$

$$h = h(p, T)$$

➤ Par suite,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT$$

➤ D'après la relation du premier principe précédente:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{vdp}{T} = \boxed{\frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p} dT + \boxed{\frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right]} dp \quad \left| \quad Tds = dh - vdp \right.$$

➤ Par comparaison, on obtient:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right]$$

2.3.1 Relations de réciprocité

Transformations thermodynamiques

Relations de réciprocité obtenues à partir de $s = s(p, T)$ et $h = h(p, T)$

➤ De plus, à l'aide de la propriété différentielle suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \right)_p$$

➤ On obtient les relations,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

2.3.1 Relations de réciprocité

Transformations thermodynamiques

Relations de réciprocité obtenues à partir de $s = s(v, T)$ et $e = e(v, T)$

➤ Soient,

$$s = s(v, T)$$

$$e = e(v, T)$$

➤ Par suite,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT$$

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT$$

➤ D'après la relation du premier principe précédente:

$$ds = \frac{de}{T} + \frac{pdv}{T} = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] dv + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT \quad \left| \quad Tds = de + pdv \right.$$

➤ Par comparaison, on obtient:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{1}{T} \left[p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \right]$$

2.3.1 Relations de réciprocité

Transformations thermodynamiques

Relations de réciprocité obtenues à partir de $s = s(v, T)$ et $e = e(v, T)$

➤ De plus, à l'aide de la propriété différentielle suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T \right)_v$$

➤ On obtient les relations,

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \right]$$

2.3.2 Calcul de variation d'entropie

Transformations thermodynamiques

Variations d'entropie pour une transformation arbitraire

- Avec la relation de Gibbs:

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{de}{T} + \int_1^2 \frac{p}{T} dv$$

- En se servant de $e = e(v, T)$

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv \right] + \int_1^2 \frac{p}{T} dv$$

$$Tds = de + pdv$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T}$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p$$

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v$$

- Avec les relations de réciprocity et les définitions des chaleurs spécifiques:

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] dv = \int_1^2 \frac{c_v}{T} dT + \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv$$

2.3.2 Calcul de variation d'entropie

Transformations thermodynamiques

Variations d'entropie pour une transformation arbitraire

- Avec la relation de Gibbs:

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{dh}{T} - \int_1^2 \frac{v}{T} dp$$

- En se servant de $h = h(p, T)$

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \right] - \int_1^2 \frac{v}{T} dp$$

- Avec les relations de réciprocity et les définitions des chaleurs spécifiques:

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{c_p}{T} dT + \int_1^2 \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] dp = \int_1^2 \frac{c_p}{T} dT - \int_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

$$Tds = dh - vdp$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

2.3.3 Transformation isentrope

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

- A partir de la relation:

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_i$$

- Une transformation est dite **ISENTROPIQUE** si:

$$ds = 0$$

$$s = \text{const}$$

- Une transformation est donc isentrope quand:

- Elle est **adiabatique**:

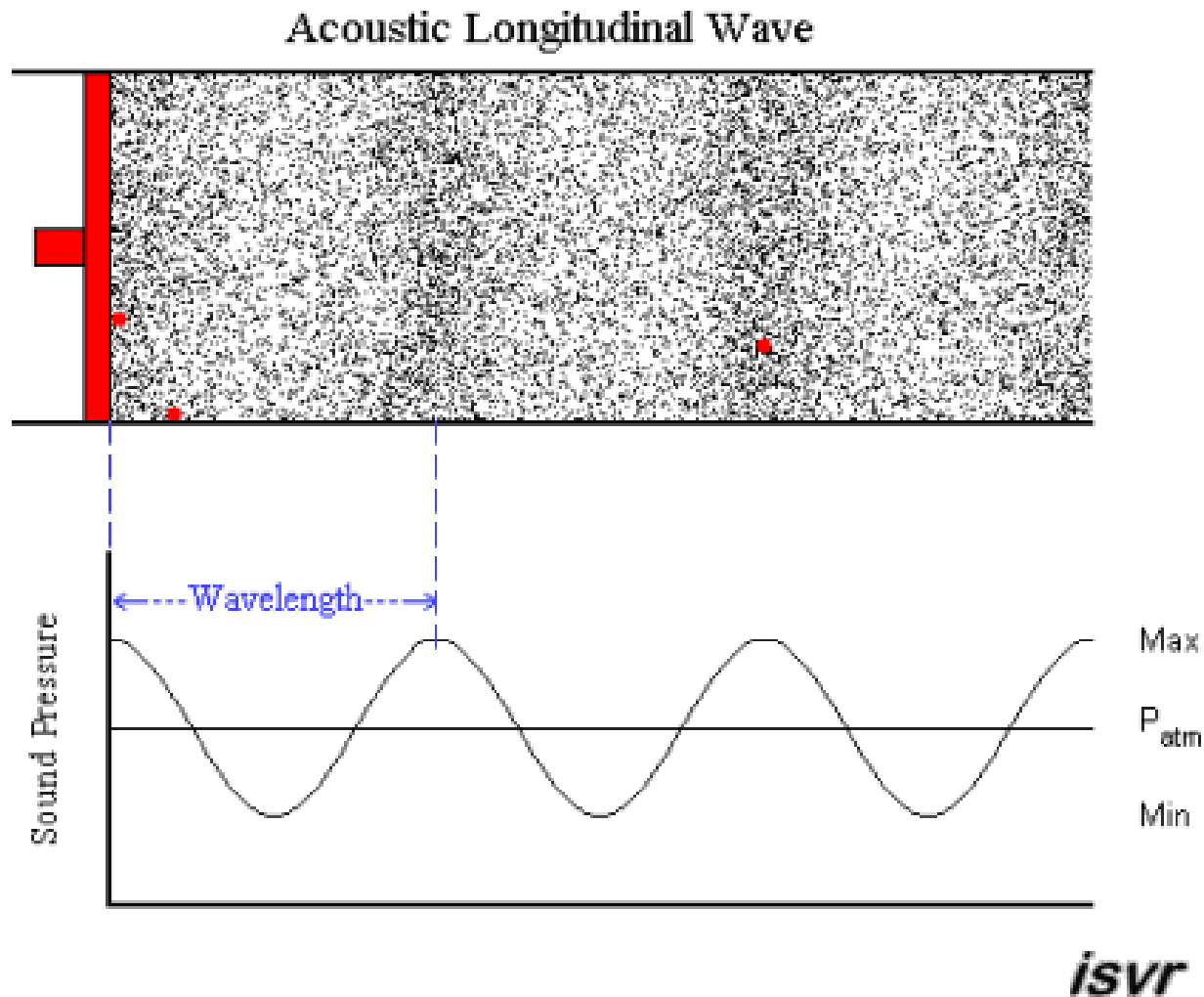
$$\delta q = 0$$

- Elle est **réversible**:

$$\delta s_i = 0$$

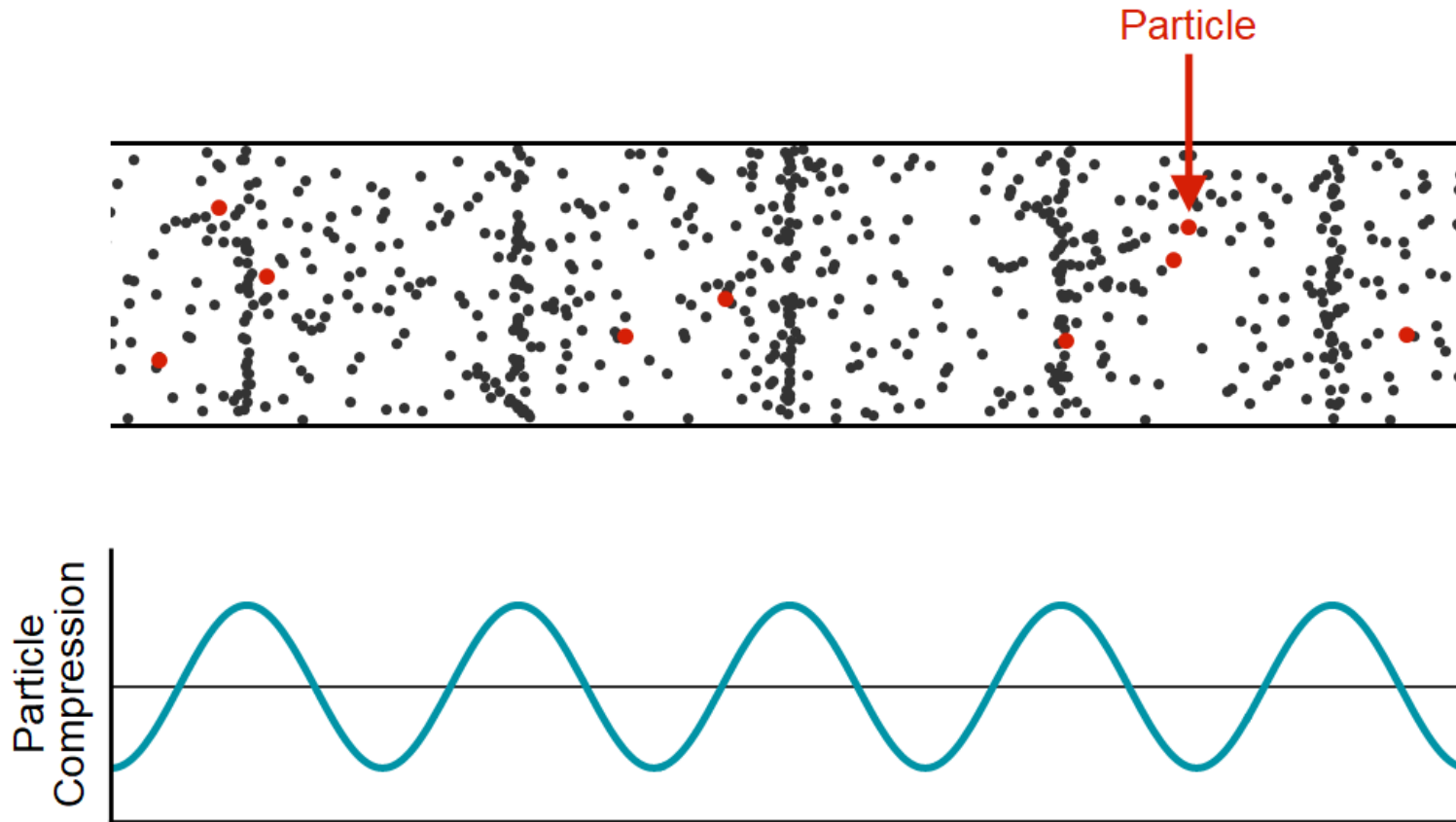
2.3.4 Vitesse du son

Transformations thermodynamiques



2.3.4 Vitesse du son

Transformations thermodynamiques



2.3.4 Vitesse du son

Transformations thermodynamiques

➤ **Isotherme** (température constante) ou **isentropique** (adiabatique et réversible) ???

➤ Diffusion thermique: $D \sim 10^{-3} - 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$

➤ Echelle de diffusion thermique (distance sur laquelle se propage la chaleur):

$$\delta_{thermique} \sim \sqrt{\frac{D}{f}} \quad f : \text{fréquence acoustique}$$

➤ Echelle de propagation sonore = longueur d'onde acoustique:

$$\delta_{acoustique} \sim \frac{a}{f} \quad a : \text{vitesse du son}$$

$$\frac{\delta_{thermique}}{\delta_{acoustique}} \sim \frac{\sqrt{D \cdot f}}{a} \ll 1$$

La propagation acoustique est largement adiabatique pour $f \ll 10^9 \text{ Hz}$

2.3.4 Vitesse du son

Transformations thermodynamiques

- Soit une transformation **isentropique** $p = p(\rho, s) = p(\rho, s_0) = p(\rho)$
- On considère une **petite perturbation** de pression Δp
- On effectue un développement en série de Taylor

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

➤ Définition

On appelle **vitesse du son** la grandeur a telle que:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

Une variation de pression dp agissant sur une particule engendre un pourcentage de variation de volume dV/V

➤ Définition

- Le **coefficient de compressibilité** est définie par:

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right) \quad \alpha = -\frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right) \quad \alpha = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dp} \right)$$

- Cette définition est insuffisante, il faut spécifier la transformation

$$\alpha_x = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_x \quad \alpha_x = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_x \quad \alpha_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_x$$

- Par exemple, avec $x = s$, on obtient le **coefficient de compressibilité isentropique**:

$$\alpha_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$$

$$\alpha_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s$$

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$$

2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

La compressibilité d'un écoulement (ou d'une transformation) est la variation de masse volumique, qui dépend de la variation de deux variables d'état

- Avec la pression et la température comme variables indépendantes

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_T dp - \beta_p dT \quad \alpha_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad \beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

- Avec la pression et l'entropie comme variables indépendantes

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p ds = \alpha_s dp - \frac{\beta_p T}{c_p} ds$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = \frac{1}{\rho} \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p} = \frac{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p} = \frac{-\beta_p}{\frac{c_p}{T}} \quad \frac{c_p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$$

2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

➤ Pour un écoulement **isentropique**:

$$\frac{d\rho}{\rho} = (\alpha_s p) \cdot \frac{dp}{p}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{p}{\rho a^2} \cdot \frac{dp}{p}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_s dp - \frac{\beta_p T}{c_p} ds$$

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho a^2}$$

- Pour un liquide: $\alpha_s p = \frac{p}{\rho a^2} \ll 1$
- On utilise aussi le **module d'élasticité isentropique** pour spécifier la compressibilité

$$K_s = \frac{1}{\alpha_s} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \rho a^2$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

- Plus K_s est grand, plus le matériau est rigide, plus la vitesse du son est grande

2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

➤ Eau

$$K_s \sim 21'000 \text{ atm}$$

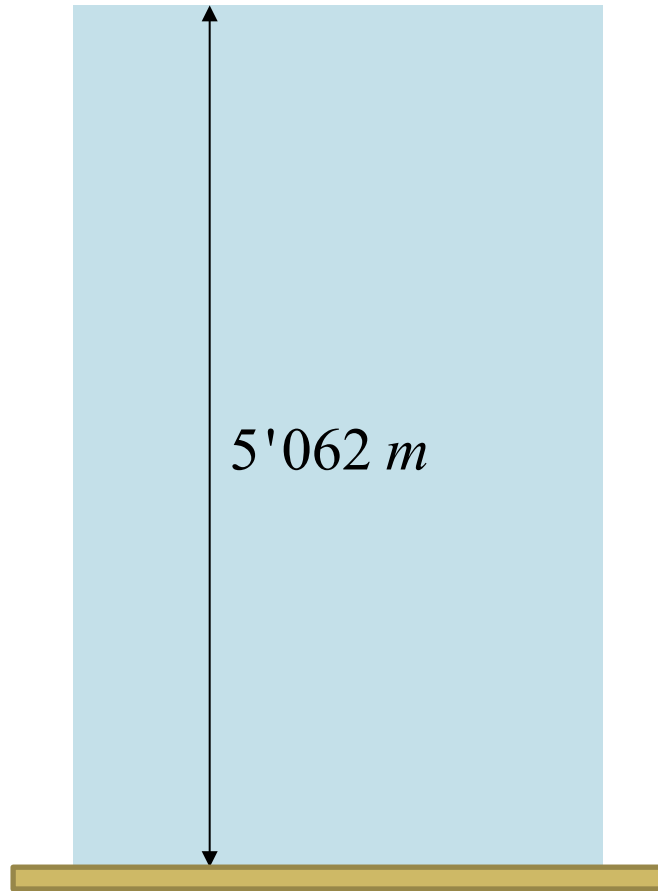
$$\alpha_s \sim 4,8 \times 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim 1\% \Leftrightarrow \Delta p \sim 210 \text{ atm}$$

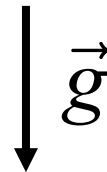
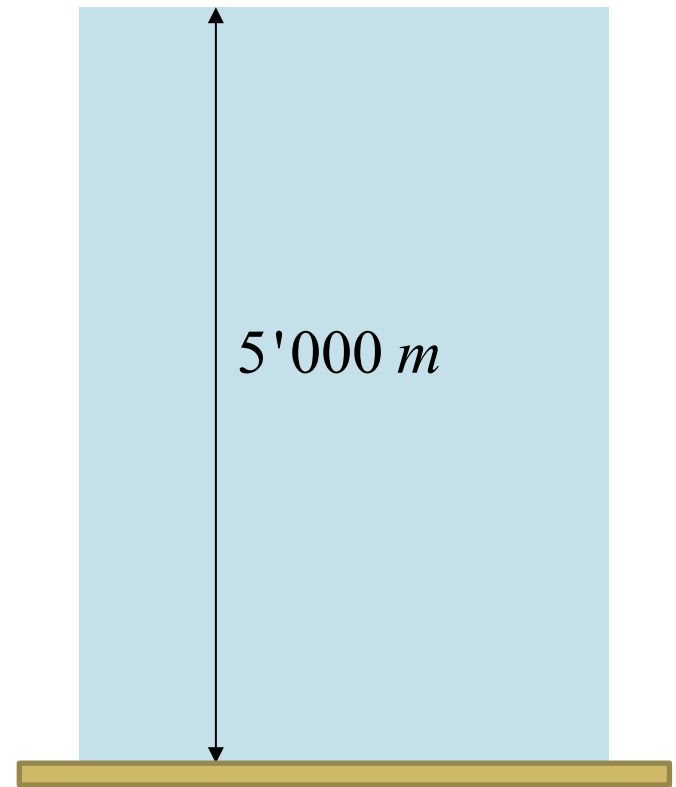
2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

➤ Eau incompressible



➤ Eau compressible



2.3.5 Compressibilité

Transformations thermodynamiques

Interprétation du nombre de Mach M

- Le nombre de Mach M caractérise la compressibilité d'un écoulement

$$M = \frac{u}{a}$$

- En élevant au carré, on voit apparaître

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{\rho u^2}{K_s} = \frac{\rho u^2 S}{K_s S}$$

$$K_s = \rho a^2$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

- Avec une surface S arbitraire, on a:

$$F_{\text{inertie}} \approx \rho u^2 S$$

$$F_{\text{rigidité}} \approx K_s S$$

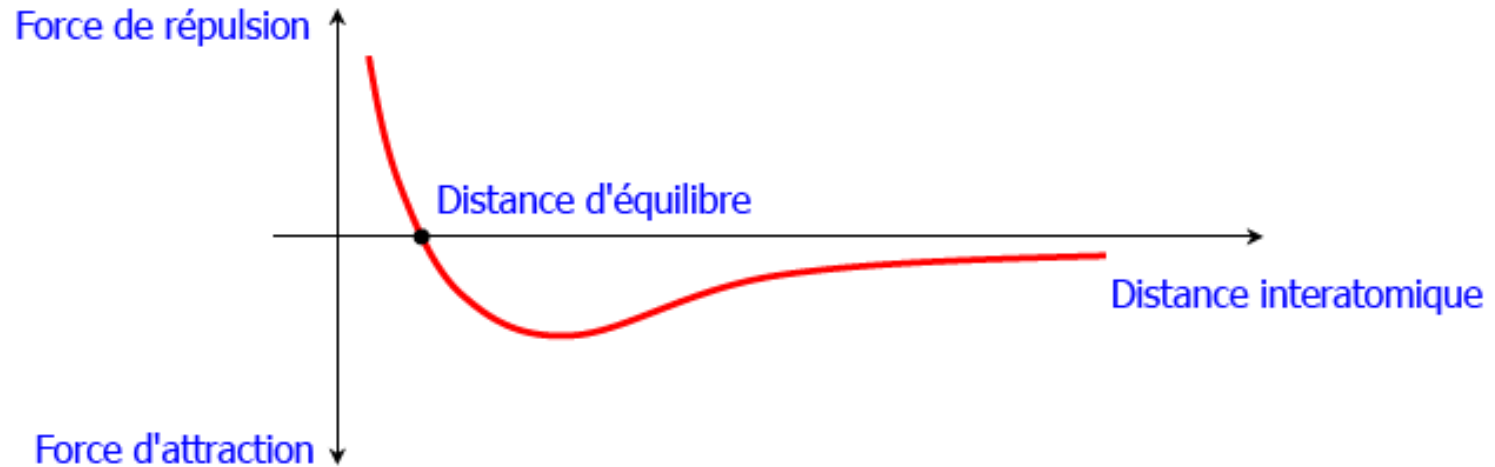
$$M^2 \approx \frac{F_{\text{inertie}}}{F_{\text{rigidité}}} = \frac{\sigma_{\text{inertie}}}{\sigma_{\text{rigidité}}}$$

L'écoulement est compressible lorsque les effets d'inertie dominent les effets de rigidité (responsables de la vitesse de propagation des ondes de pression).

2.4.1 Définition

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Force d'interaction entre atomes et molécules



➤ Pour un gaz parfait, on suppose une distance infiniment grande entre les molécules

- Energie potentielle d'interaction nulle
- Energie sous forme d'énergie cinétique uniquement

2.4.1 Définition

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

➤ Si un gaz est considéré comme **parfait**:

Loi des physiciens (en nombre de particules $N_{particles}$)

$$p \cdot V = N_{particles} \cdot k \cdot T$$

$$p = \frac{N_{particles}}{V} \cdot k \cdot T = n_{particles} \cdot k \cdot T$$

Loi des chimistes (en nombre de moles N_{moles})

$$p \cdot V = \left(\frac{N_{particles}}{N_A} \right) \cdot (k \cdot N_A) \cdot T = N_{moles} \cdot R \cdot T$$

$$p = \frac{N_{moles}}{V} \cdot R \cdot T = n_{moles} \cdot R \cdot T$$

Loi des ingénieurs (en masse m)

$$p \cdot V = (N_{moles} \cdot \mathcal{M}) \cdot \left(\frac{R}{\mathcal{M}} \right) \cdot T = m \cdot r \cdot T$$

$$p = \frac{m}{V} \cdot r \cdot T = \rho \cdot r \cdot T$$

➤ Constante de Boltzmann

$$k = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

➤ Nombre d'Avogadro

$$N_A = 6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

➤ Constante universelle des gaz

$$R = k \cdot N_A = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

➤ Masse molaire

$$\mathcal{M} \text{ [kg} \cdot \text{mol}^{-1}]$$

➤ Constante spécifique du gaz

$$r = \frac{R}{\mathcal{M}} \text{ [J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$$

2.4.2 Conséquence de l'équation des gaz parfaits

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Energie interne et enthalpie

➤ On considère les relations de réciprocités suivantes:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \right] \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

➤ Avec l'équation d'état, on montre que:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T = 0 \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0$$

➤ En d'autres termes:

$$e = e(\rho, T) \rightarrow e = e(T)$$

$$h = h(p, T) \rightarrow h = h(T)$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne et l'enthalpie ne dépendent que de la température statique

2.4.2 Conséquence de l'équation des gaz parfaits

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Variation d'énergie interne avec $e = e(\rho, T)$

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho dT$$

➤ Relations de réciprocité,

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T = 0 \quad \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho = c_v$$

➤ On remplace et on intègre:

$$e = \int c_v(T) dT + const$$

➤ Pour une transformation avec c_v constant:

$$e = c_v T + const$$

Variation d'enthalpie avec $h = h(p, T)$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT$$

➤ Relations de réciprocité,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = 0 \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_p$$

➤ On remplace et on intègre:

$$h = \int c_p(T) dT + const$$

➤ Pour une transformation avec c_p constant:

$$h = c_p T + const$$

2.4.2 Conséquence de l'équation des gaz parfaits

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Chaleurs spécifiques

➤ On rappelle la relation précédemment obtenue:

$$c_p - c_v = \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = v \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

➤ Avec l'équation des gaz parfaits, on a la **relation de Meyer**:

$$c_p - c_v = r \qquad 1 - \frac{c_v}{c_p} = \frac{r}{c_p}$$

➤ Avec la définition $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

2.4.2 Conséquence de l'équation des gaz parfaits

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Variation d'entropie avec $s = s(T, p)$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp$$

➤ Relations de réciprocité,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{v}{T}$$

➤ On obtient avec l'équation d'état:

$$s = \int c_p \frac{dT}{T} - r \ln(p) + \text{const}$$

➤ Pour une transformation avec c_p constant:

$$\Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Variation d'entropie avec $s = s(T, v)$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv$$

➤ Relations de réciprocité,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{p}{T}$$

➤ On obtient avec l'équation d'état:

$$s = \int c_v \frac{dT}{T} + r \ln(v) + \text{const}$$

➤ Pour une transformation avec c_v constant:

$$\Delta s = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + r \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

2.4.3 Transformation isentrope

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

➤ Avec :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \qquad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

➤ On obtient:

$$\Delta s = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \qquad \Delta s = \frac{r}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + r \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

➤ On divise par r

$$\frac{\Delta s}{r} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\frac{\Delta s}{r} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} + \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

2.4.3 Transformation isentrope

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

➤ Pour une transformation **isentrope** (adiabatique et réversible), on a: $\Delta s = 0$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \qquad \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = -\ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = +\ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma}$$

$$p = \text{const} \cdot \rho^{\gamma}$$

➤ La plus simple à mémoriser:

2.4.4 Vitesse du son

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

➤ Avec l'équation d'état et la relation isentrope, on a:

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = rT = \frac{p}{\rho} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{\text{const} \cdot \rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

➤ On en déduit la relation:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$$

➤ On a donc

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma rT$$

La vitesse du son est une propriété du fluide par l'intermédiaire de la grandeur γ qui dépend de son état, ici la température T .

2.4.5 Compressibilité

Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

- Avec la pression et la température comme variables indépendantes

$$\alpha_T = \frac{1}{p} \quad \beta_p = \frac{1}{T}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_T dp - \beta_p dT$$

$$\alpha_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

$$\beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

- Pour un écoulement **isentrope**:

$$\frac{d\rho}{\rho} = (\alpha_s p) \cdot \frac{dp}{p}$$

■ Gaz parfait: $\alpha_s p = \frac{1}{\gamma} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_s dp - \frac{\beta_p T}{c_p} ds$$

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho a^2}$$

$$a^2 = \gamma r T$$